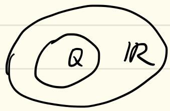
Ex1 : 1. Faux. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



2. Vrai $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

3. Faux.

On dit que A admet un plus grand élément s'il existe un élément M de A qui majore tous les autres. $M = \max(A)$

petit

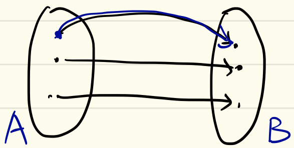
minore.

par exemple. $A = [0, 2[$ pas de plus grand élément car $2 \notin A$

4. Vrai.

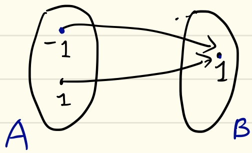
5. Faux. $f(-1) = f(1) = 1$

1 a deux antécédents



bijection

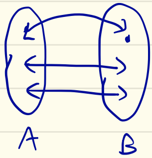
$f(x) = x^2$



par exemple

$g(x) = x$

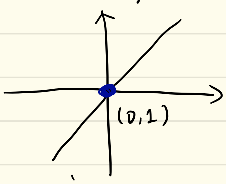
bijection



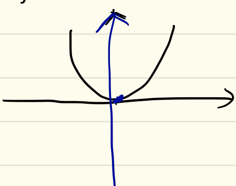
6. Vrai

la fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

la fonction paire : $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$



impaire



paire

impaire et paire

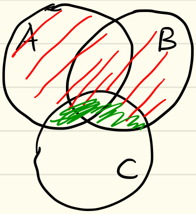
De plus, si $f(x)$ est impaire, on a $f(-x) = -f(x)$
si $f(x)$ est paire, on a $f(-x) = f(x)$ $\Big\}$ $\Rightarrow -f(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 0$

Ex2. ① $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

$A\cup B$:  ou

$A\cap B$  et



"$\Rightarrow$" $(A\cup B)\cap C \subseteq (A\cap C)\cup(B\cap C)$

Soit $x\in(A\cup B)\cap C$, alors $x\in A\cup B$ et $x\in C$

$\Rightarrow$ $x\in A$ ou $x\in B$ et $x\in C$

C'est-à-dire. $x\in C$ et $x\in A$ ou $x\in C$ et $x\in B$

Ce qui donne $x\in A\cap C$ ou $x\in B\cap C$

Donc $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

"$\Leftarrow$" $(A\cup B)\cap C \supseteq (A\cap C)\cup(B\cap C)$

Soit $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$, alors $x\in A\cap C$ ou $x\in B\cap C$

Ceci peut s'écrire $(x\in A$ et $x\in C)$ ou $(x\in B$ et $x\in C)$

c'est-à-dire : $x\in A$ ou $x\in B$ et $x\in C$

ce qui donne $x\in A\cup B$ et $x\in C$

Donc $x\in(A\cup B)\cap C$

② $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

"$\Rightarrow$" $(A\cap B)\cup C \subseteq (A\cup C)\cap(B\cup C)$

Soit $x\in(A\cap B)\cup C$, alors $x\in A\cap B$ ou $x\in C$

c'est-à-dire. $x\in A$ et $x\in B$ ou $x\in C$

Ce qui revient à $(x\in A$ ou $x\in C)$ et $(x\in B$ ou $x\in C)$

Donc $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$

"$\Leftarrow$" Soit $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, alors $x\in A\cup C$ et $x\in B\cup C$

c'est-à-dire $x\in A$ ou $x\in C$ et $x\in B$ ou $x\in C$

Donc $(x\in A$ et $x\in B)$ ou $x\in C$

$\Rightarrow$ $x\in(A\cap B)\cup C$

Ex3 :

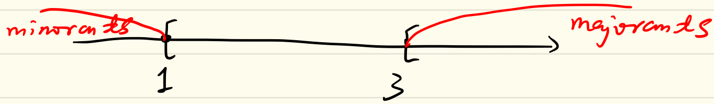
On dit que A admet un plus grand élément s'il existe un élément
petit
M de A qui majore tous les autres. $M = \max(A)$
minore.

la borne supérieur de A : si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$,
inf
alors l'ensemble de ces majorante admet toujour un plus
minorants
petit élément On le note $\sup(A)$
grand $\inf(A)$

On dit que A est majorée s'il existe $K \in \mathbb{R}$ t.q $K \geq x$ pour
minorée k $k \leq x$
tout $x \in A$. K est un majorant de A
k minorant

① $A = [1, 3[$

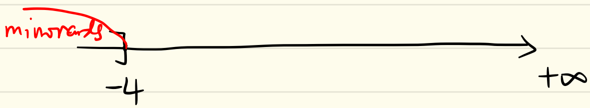
A est majorée et minorée. $\min(A) = 1$. $\inf(A) = 1$.
A n'a pas de plus grand élément car $3 \notin A$ $\sup(A) = 3$



② $B =]-4, +\infty[$

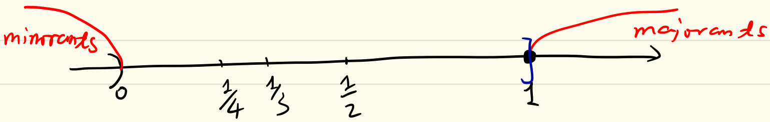
B n'a pas de plus grand élément. mais $\sup B = +\infty$.

B n'a pas de plus petit élément. car $-4 \notin B$.
$\inf(B) = -4$



③ $C = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, 3 \dots \right\}$.

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



C est majorée et minorée. donc $\sup(C) = 1$ $\inf(C) = 0$

$\max(C) = 1$

C n'a pas de plus petit élément, car $0 \notin C$.

Ex4 : dénominateur n'est pas nul !

On ne peut pas diviser par 0 !

① $f(x) = \frac{2}{x}$ $D_f = \mathbb{R}^*$ $x \neq 0$

② $f(x) = 4 + \frac{7}{x-2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

③ $f(x) = 2 + \frac{8}{x^2+2}$.

puisque $x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. donc $D_f = \mathbb{R}$

④ $f(x) = 17 + 3x + \frac{9}{x^2-16}$.

f est définie pour $x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$ $x \neq 4$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$

⑤ $f(x) = 5 - \frac{2}{x^2-5x+6}$. $f(x)$ est définie pour $x^2 - 5x + 6 \neq 0$

Trouver les racines de $x^2 - 5x + 6$

Méthode 1 : $x^2-5x+6=0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times 6 = 1$

Donc les racines sont $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$. $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad ax^2+bx+c=0$

Deux racines $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Méthode 2 :

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 \underbrace{-(x_1+x_2)}_{b}x + \underbrace{x_1x_2}_{c}$$

$$x^2 \underbrace{-5}_{\Downarrow\ -2-3}x + \underbrace{6}_{\Downarrow\ (-2)\times(-3)\ \Downarrow\ 2\times 3} = x^2-(2+3)x+2\times 3$$

$$= (x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad\ \ -2 \\ \times \\ 1 \quad\ \ -3 \\ \hline (x-2)(x-3) \end{array}$$

Donc les racines sont 2 et 3

le Domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

---

① Trouver les racines de ax^2+bx+c

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

② Trouver les racines de x^2+bx+c.

chercher x_1 et x_2 tels que $x_1+x_2=-b$, $x_1x_2=c$

exemple 1 : $x^2-7x+12=0$

$$\begin{array}{c} 1 \quad\ \ -3 \\ \times \\ 1 \quad\ \ -4 \\ \hline \end{array}$$

$3+4=-7=-b$

$3\times 4 = 12$

$(x-3)(x-4) = x^2-7x+12$

exemple 2 : $x^2-x-12=0$

$$\begin{array}{c} 1 \quad\ \ +3 \\ \times \\ 1 \quad\ \ -4 \\ \hline \end{array}$$

$-3+4=1=-(-1)=-b$

$(-3)\times 4 = -12 = c$

$(x+3)(x-4) = x^2-x-12$

pour tout

EX5 : fonction impaire : si $\forall x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = -f(x)$

paire : si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$

$f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$ ou autre ?

1. $f(x) = 2x^4 - x^2 + 7$

$$f(-x) = 2 \times (-x)^4 - (-x)^2 + 7 \qquad (-1)^2 = 1$$

$$= 2x^4 - x^2 + 7 = f(x)$$

paire.

2. $g(x) = x^3 - 7x$

$$g(-x) = (-x)^3 - 7 \times (-x) \qquad (-1)^3 = -1$$

$$= -x^3 + 7x$$

$$= -(x^3 - 7x) = -g(x)$$

impaire

Remarque :

x^2 est paire, car $(-x)^2 = x^2$

x^4 x^6 ... paire

x^n est paire, si n est paire.

$x^2 + x^4 + \cdots x^n$ est paire, si n est paire

x^3 est impaire, car $(-x)^3 = -x^3$

$x + x^3 + x^5 + \cdots x^m$ est impaire. si m est impaire

3. $h(x) = x^5 + 2x^2 + 1$

$$h(-x) = (-x)^5 + 2(-x)^2 + 1$$

$$= -x^5 + 2x^2 + 1 \neq h(x)$$

$$\neq -h(x)$$

ni impaire. ni paire

4. $F(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 7}$

$$F(-x) = \frac{(-x)^3 + 8}{(-x)^2 + 7} = \frac{-x^3 + 8}{x^2 + 7} \neq F(-x)$$

Aussi. $F(-x) \neq -F(x)$, ni impaire, ni paire

Ex6:

- pour $n=1$, on a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1 = 1^2$, donc la proriété est vrai pour $n=1$.

- Supposons maintenant que la propriété est vrai au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'elle est vrai pour $n+1$. c-à-d, $1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Selon l'hypothèse de récurrence au rang n, on a
$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{1}{6}\left((n^2+n)(2n+1)\right) + n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+2n^2+n^2+n\right)+n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1$$

D'autre part,
$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}\left((n^2+3n+2)(2n+3)\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left(2n^3+9n^2+13n+6\right)$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{13}{6}n+1$$

Donc on a bien $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est la propriété au rang $n+1$.

cqfd.

Ex7 : ① $\pi(q) = 100q - C(q)$

$$= 100q - (0.1q^2 + 50q + 4000) = -0.1q^2 + \underline{100q - 50q} - 4000$$

$$= -0.1q^2 + 50q - 4000$$

② $\pi(q)$ est un polynôme de degré 2. on trouve les racines de $\pi(q)$

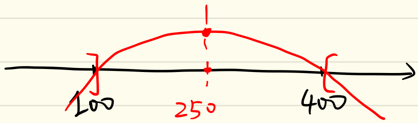
$$\pi(q) = -0.1q^2 + 50q - 4000 = 0$$

$$\Delta = 50^2 - 4 \times (-0.1) \times (-4000) = 2500 - 1600 = 900 > 0$$

Donc. $x_1 = \dfrac{-50 + \sqrt{900}}{2 \times (-0.1)} = 100$, $x_2 = \dfrac{-50 - \sqrt{900}}{2 \times (-0.1)} = 400$

③ On a $\pi(q) = -0.1q^2 + 50q - 4000$

$$= -0.1(q - 100)(q - 400)$$



Donc si $q \in]100, 400[$, $\pi(q)$ est positif.

Remarque : la dérivée de $\pi(q)$: $\pi'(q) = -0.2q + 50 = 0$

$\Rightarrow$ $q = 250$.

variation

x	100		250		400
$\pi'(q)$		$+$	$\square$	$-$	
$\pi(q)$	$\square$	$\nearrow$		$\searrow$	$\square$

Ex8 : $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

$f(1) = 1^3 - 7\times 1^2 + 14\times 1 - 8 = 0$

Alors 1 est une racine de $f(x)$. Donc on peut factoriser $f(x)$ par $(x-1)$. c-à-d. $f(x)$ s'écrit sous la forme du produit de $(x-1)$ et un poly de 2, i.e.

$$f(x) = \underline{(x-1)(\underset{1}{a}x^2 + bx + c)}$$

Comme le terme de plus haut degré de $f(x)$ est x^3.

on a $a = 1$

Pour trouver b et c, on développe.

$$(x-1)(x^2 + bx + c) = x^3 + bx^2 - x^2 + cx - bx - c$$
$$= x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c$$
$$= x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

Donc
$$b - 1 = -7$$
$$c - b = 14$$
$$c = 8$$

$\Rightarrow$ $c = 8$, $b = -6$

Donc. $f(x) = (x-1)(x^2 - 6x + 8)$

② $f(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x^2 \underbrace{- 6}_{-2-4}x + \underbrace{8}_{(-2)(-4)} = 0$

méthode 1 :

$\Delta = 36 - 4\times 8 = 4$

$x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4$

$x_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2$

méthode 2 :

$$\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{array}$$

$(x-2)(x-4)$

Les trois racines de $f(x)$ sont 1, 2, 4.

Ex9 : ① $(x+2)^5 = (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$

② La formule du binôme de Newton.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$C_5^0 = C_5^5 = 1$

$C_5^1 = C_5^4 = 5$

$C_5^3 = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

$$(x+2)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^{5-k} 2^k$$

$$= C_5^0 x^5 2^0 + C_5^1 x^4 2^1 + C_5^2 x^3 2^2 + C_5^3 x^2 2^3 + C_5^4 x 2^4 + C_5^5 x^0 2^5$$

$$= x^5 + 5x^4 \times 2 + 10x^3 \times 4 + 10x^2 \times 8 + 5x \times 2^4 + 2^5$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Ex10 : ① pour un nombre x d'exemplaires.

la fonction de coût total est

$$C(x) = \begin{cases} 5x & x \leq 2000 \\ 2000 \times 5 + 8(x - 2000) & x > 2000 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x & x \leq 2000 \\ 8x - 6000 & x > 2000 \end{cases}$$

② la fonction de coût moyen.

$$M(x) = \frac{C(x)}{x} = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2000 \\ 8 - \frac{6000}{x} & \text{si } x > 2000 \end{cases}$$